非線形拡散を持つ Fokker-Planck 方程式における時間局所解の存在性

日本大学大学院　理工学研究科　数学専攻
荒木　康太 (Kouta ARAKI) *

概要

ノイマン境界条件のもとで，空間不均一な非線形拡散を持つ Fokker-Planck 方程式を考察する．この方程式は多孔質媒質型の非線形性を持つ自由エネルギーに空間不均一性を導入し，エネルギー散逸則，連続の方程式をもとに，導出されたものである．先の MCYR21 では，時間大域的古典解の存在を仮定した上での自由エネルギーの長時間挙動について報告した．本講演では，その仮定の前提となる時間局所解の存在について得られたことを報告する．

1　非線形 Fokker-Planck 方程式

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな境界を持つ有界凸領域，ν は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトル，$\alpha > 1$ の定数とする．以下の非線形 Fokker-Planck 方程式を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \nabla(\alpha d(x)\rho^{\alpha-1} + \phi(x))) = 0, \quad x \in \Omega, t > 0, \\ \rho(x,0) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega, \\ \rho \nabla(\alpha d(x)\rho^{\alpha-1} + \phi(x)) \cdot \nu = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \tag{NFP}$$

ここで，$d = d(x) \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$，$\phi(x) \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$，$\rho_0 \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は与えられた関数である．$\overline{\Omega}$ 上 $d, \rho_0 > 0$ であり，

$$\int_\Omega \rho_0 \, dx = 1 \tag{1}$$

を仮定する．(1) の仮定は (NFP) が確率微分方程式と関係があることに由来する．

$$\mu := \alpha d(x)\rho^{\alpha-1} + \phi(x) \tag{2}$$

とすると (NFP) は連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \nabla \mu) = 0 \tag{3}$$

と書き換えられる．連続の方程式と Gauss の発散定理から以下が成り立つ．

* E-mail:csku24001@g.nihon-u.ac.jp

補題 1.1. ρ は (NFP) の正値な古典解とする．このとき，

$$\int_\Omega \rho_0\, dx = \int_\Omega \rho\, dx = 1 \tag{4}$$

となる．

次に自由エネルギーを

$$\mathcal{F}[\rho](t) := \int_\Omega (d(x)\rho^\alpha + \rho\phi(x))\, dx$$

と定義する．(NFP) と部分積分により

命題 1.2. ρ は (NFP) の正値な古典解とすると

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}[\rho](t) = -\int_\Omega |\nabla\mu|^2 \rho\, dx \le 0 \tag{5}$$

が成り立つ．

(5) を 0 から $T > 0$ まで積分すると，

$$\mathcal{F}[\rho](T) + \int_0^T \int_\Omega |\nabla\mu|^2 \rho\, dx dt = \mathcal{F}[\rho](0) \tag{6}$$

が成り立つ．$\mathcal{F}[\rho](0) < \infty$ を仮定したとき，(6) の両辺 $T \to \infty$ すると，広義積分が収束することから，以下が成り立つ．

$$t_j \to \infty, \qquad \int_\Omega |\nabla\mu|^2 \rho\, dx \to 0, \quad j \to \infty \tag{7}$$

昨年度の MCYR21 で以下を報告した．

定理 1.3 ([1, 2])**.** 次元 $n = 1, 2, 3$ とする．(NFP) の時間大域的古典解 ρ が存在し，ある正の定数 $\lambda > 0$ が存在して $\nabla^2\phi(x) > \lambda I$ が成り立つと仮定する．このとき，ある正の定数 $C_1, C_2, C_3 > 0$ が存在して

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} d(x) \ge C_1, \quad \alpha d(x)\rho_0^{\alpha-1}(x) > \max\phi - \phi(x), \quad \int_\Omega |\nabla\mu(x,0)|^2 \rho_0(x)\, dx < C_2$$

が成り立つならば，

$$\int_\Omega |\nabla\mu|^2 \rho\, dx < C_3 e^{-\lambda t} \tag{8}$$

が成り立つ．

注意 1.4. 定理 *1.3* の初期値の仮定は (NFP) の時間大域的古典解 ρ が正値で有界であるための条件である．

定理 1.3 では (NFP) の時間大域的古典解の存在を仮定している．(NFP) は $\mathrm{div}(\rho\nabla(\alpha d(x)\rho^{\alpha-1}))$ の項が存在するため，多孔質媒質型の非線形拡散を持つ．一般に多孔質媒質方程式には古典解が存在しないことが知られている．そのため，(NFP) の時間大域的古典解が存在するような既知関数の十分条件を考察する．次に解空間の定義をする．

2 Hölder 空間

(NFP) の解空間として，[5, 6] を参考に Hölder 空間の定義をする．そこで，$0 < \beta < 1$，関数 $f\colon \Omega\times[0,T) \to \mathbb{R}$ に対して，一様ノルム $\|f\|_C$，空間変数に関する Hölder セミノルム $[f]_\beta$，時間変数に関する Hölder セミノルム $\langle f\rangle_\beta$ を以下で定義する．

$$
\begin{aligned}
\|f\|_C &:= \sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T)} |f(x,t)|,\\
[f]_\beta &:= \sup_{(x,t),(y,t)\in\Omega\times[0,T)} \frac{|f(x,t)-f(y,t)|}{|x-y|^\beta},\\
\langle f\rangle_\beta &:= \sup_{(x,t),(x,s)\in\Omega\times[0,T)} \frac{|f(x,t)-f(x,s)|}{|t-s|^\beta}.
\end{aligned}
$$

時空間の Hölder 空間 $C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))$，$C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))$ を以下で定める．

$$
\begin{aligned}
C^{\beta,\beta/2}(\Omega\times[0,T)) &:= \{f\colon \Omega\times[0,T)\to\mathbb{R} \,\big|\, \|f\|_{C^{\beta,\beta/2}(\Omega\times[0,T))} < \infty\},\\
C^{2+\beta,1+\beta/2}(\Omega\times[0,T)) &:= \{f\colon \Omega\times[0,T)\to\mathbb{R} \,\big|\, \|f\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\Omega\times[0,T))} < \infty\}.
\end{aligned}
$$

ここで，$\|f\|_{C^{\beta,\beta/2}(\Omega\times[0,T))}$，$\|f\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\Omega\times[0,T))}$ は

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{C^{\beta,\beta/2}(\Omega\times[0,T))} &:= \|f\|_C + [f]_{\beta,\overline{\Omega}\times[0,T)} + \langle f\rangle_{\beta/2,\overline{\Omega}\times[0,T)},\\
\|f\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\Omega\times[0,T))} &:= \|f\|_C + \|\nabla f\|_C + \|\nabla^2 f\|_C,\\
&\quad + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_C + \left[\nabla^2 f\right]_{\beta,\overline{\Omega}\times[0,T)} + \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{\beta,\overline{\Omega}\times[0,T)}\\
&\quad + \langle\nabla f\rangle_{(1+\beta)/2,\overline{\Omega}\times[0,T)} + \left\langle\nabla^2 f\right\rangle_{\beta/2,\overline{\Omega}\times[0,T)} + \left\langle\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle_{\beta/2,\overline{\Omega}\times[0,T)}
\end{aligned} \tag{9}
$$

と定義する．次に，先ほど定義した Hölder ノルムに対しての性質を紹介する．

補題 2.1. 任意の $\theta\in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))$ に対して，$\theta(x,0)=0$ とする．このとき，

$$
\|\nabla\theta\|_{C^{\beta,\beta/2}(\Omega\times[0,T))} \le 3(T^{(1+\beta)/2}+T^{1/2})\|\theta\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\Omega\times[0,T))}.
$$

が成り立つ．

証明. $\|\nabla\theta\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}$ を評価するために，$\nabla\theta$ の一様ノルムを上から評価する．

$$
|\nabla\theta| = \frac{|\nabla\theta(x,t)-\nabla\theta(x,0)|}{|t|^{(1+\beta)/2}}|t|^{(1+\beta)/2} \le \langle\nabla\theta\rangle_{(1+\beta)/2}T^{(1+\beta)/2}.
$$

が成り立つ．そのため，

$$
\|\nabla\theta\|_C \le T^{(1+\beta)/2}\|\theta\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}. \tag{10}
$$

が成り立つ．次に空間に対する Hölder セミノルムを評価する．$|x-x'|<t^{1/2}$ のとき，

$$\begin{aligned}|\nabla\theta(x,t)-\nabla\theta(x',t)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{d\tau}\nabla\theta(\tau x+(1-\tau)x',t)\,d\tau\right| \\ &= \left|\int_0^1 (x-x')\nabla^2\theta(\tau x+(1-\tau)x',t)\,d\tau\right| \\ &\leq |x-x'|\int_0^1 |\nabla^2\theta(\tau x+(1-\tau)x',t)|\,d\tau.\end{aligned}$$

が成り立つ．

$$\frac{|\nabla^2\theta(\tau x+(1-\tau)x',t)-\nabla^2\theta(\tau x+(1-\tau)x',0)|}{|t|^{\beta/2}}|t|^{\beta/2} \leq \langle\nabla^2\theta\rangle_{\beta/2}T^{\beta/2}.$$

より，

$$|\nabla\theta(x,t)-\nabla\theta(x',t)| \leq |x-x'|\langle\nabla^2\theta\rangle_{\beta/2}T^{\beta/2} = |x-x'|^{\beta}|x-x'|^{1-\beta}\langle\nabla^2\theta\rangle_{\beta/2}T^{\beta/2}.$$

が成り立つ．$|x-x'|<t^{1/2}$ なので，

$$\frac{|\nabla\theta(x,t)-\nabla\theta(x',t)|}{|x-x'|^{\beta}} \leq T^{1/2}\|\theta\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}.$$

が成り立つので $|x-x'|<t^{1/2}$ の範囲で両辺空間変数に対して sup をとると，以下が成り立つ．

$$[\nabla\theta]_{\beta} \leq T^{1/2}\|\theta\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}.$$

$|x-x'|\geq t^{1/2}$ のとき，任意の $(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T)$

$$|\nabla\theta(x,t)| = \frac{|\nabla\theta(x,t)-\nabla\theta(x,0)|}{|t|^{(1+\beta)/2}}|t|^{1/2}|t|^{\beta/2} \leq \langle\nabla\theta\rangle_{(1+\beta)/2}T^{1/2}|x-x'|^{\beta} \tag{11}$$

が成り立つ．よって，

$$|\nabla\theta(x,t)-\nabla\theta(x',t)| \leq |\nabla\theta(x,t)|+|\nabla\theta(x',t)| \leq 2\langle\nabla\theta\rangle_{(1+\beta)/2}T^{1/2}|x-x'|^{\beta}.$$

したがって，両辺 $|x-x'|^{\beta}$ で割り，上限をとると

$$[\nabla\theta]_{\beta} \leq 2T^{1/2}\|\theta\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} \tag{12}$$

次に時間変数に関する Hölder セミノルムの評価を考察する．

$$\begin{aligned}|\nabla\theta(x,t)-\nabla\theta(x,t')| &= \frac{|\nabla\theta(x,t)-\nabla\theta(x,t')|}{|t-t'|^{(1+\beta)/2}}|t-t'|^{(1+\beta)/2} \\ &\leq \langle\nabla\theta\rangle_{(1+\beta)/2}T^{1/2}|t-t'|^{\beta/2}.\end{aligned}$$

両辺 $|t-t'|^{\beta/2}$ で割ると，

$$\frac{|\nabla\theta(x,t)-\nabla\theta(x,t')|}{|t-t'|^{\beta/2}} \leq \langle\nabla\theta\rangle_{(1+\beta)/2}T^{1/2}.$$

両辺 t,t' に対して上限をとると，

$$\langle\nabla\theta\rangle_{\beta/2} \leq T^{1/2}\|\theta\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}$$

が成り立つ．したがって，

$$\|\nabla\theta\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} \le 3(T^{(1+\beta)/2} + T^{1/2})\|\theta\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\Omega\times[0,T))}.$$

が成り立つ． □

補題 2.2. 任意の $\theta \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))$ に対して，$\theta(x,0)=0$ とする．このとき，

$$\|\theta\|_{C^{\beta,\beta/2}(\Omega\times[0,T))} \le 3(T + T^{1-\beta/2})\|\theta\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\Omega\times[0,T))}.$$

が成り立つ．

補題 2.3. 任意の $\theta \in C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))$，$\tilde{\theta} \in C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))$ に対して，$\theta\tilde{\theta} \in C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))$ となり，

$$\|\theta\tilde{\theta}\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} \le \|\theta\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}\|\tilde{\theta}\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}$$

3 主定理

定理 1.3 では時間大域的古典解の存在を仮定することで解の漸近挙動を考察している．そこで，(NFP) の古典解の存在について考察する．d が定数のとき，(NFP) は多孔質媒質型の非線形拡散を持つ移流拡散方程式となる．解の存在性に関してはよく知られている．d が x に依存する関数の場合，我々が調べた限り，抽象的な発展方程式の可解性の理論を適用することができない．μ に関する方程式を考察することで以下の結果を得た．

定理 3.1. $0<\beta<1$ に対して，$\phi, d, \rho_0 \in C^{2+\beta}(\Omega)$ とする．さらに，$d(x), \rho_0(x)$ は $\overline{\Omega}$ 上正値であり，$\alpha d(x)\rho_0^{\alpha-1}(x) > \max\phi - \phi(x)$ を満たすと仮定する．このとき，ある $T>0$ が存在して，(NFP) の古典解 $\rho \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))$ が存在する．

注意 3.2. 定理 *3.1* の仮定から，(NFP) の解は退化による正則性の損失に関する問題は起こらない．そこで，*Hölder* ノルムに関しての定量評価を導く必要がある．しかし，未知関数の空間微分の評価などを得る必要があるためとても困難である．

注意 3.3. $\mu = d(x)\log\rho + \phi(x)$ の場合 *[3]* では周期境界条件のもと時間大域的古典解，*[4]* では自然境界条件のもと時間局所解の存在性が考察されている．

4 主定理の証明

未知関数を μ に書き換えると，(NFP) の第一方程式は

$$\mu_t = (\alpha-1)(\mu-\phi(x))\Delta\mu - (\nabla\phi(x)\cdot\nabla\mu) - (\mu-\phi(x))(\nabla\log d(x)\cdot\nabla\mu) + |\nabla\mu|^2 \tag{13}$$

となる．(13) の解が存在すれば，μ の定義から，$d(x)$，$\phi(x)$ は既知関数なので，(NFP) の解 ρ が存在することがわかる．主定理の仮定から，$\mu - \phi(x) > 0$ が成り立つ．よって，(13) は一様放物型方程

式となる．μ を $\mu_0(x) = \mu(x, 0)$ の周りで線形化すると

$$\Phi_t = L\Phi + L\overline{\mu} + F\overline{\mu} \tag{14}$$

となる．ただし，L と F は

$$\begin{aligned} L\Phi &:= (\alpha - 1)(\mu_0(x) - \phi(x))\Delta\Phi - (\mu_0(x) - \phi)(\nabla \log d(x) \cdot \nabla\Phi) + \nabla\phi(x) \cdot \nabla\Phi + 2(\nabla\mu_0(x) \cdot \nabla\Phi) \\ &\quad + (\alpha - 1)\Phi\Delta\mu_0(x) - (\nabla \log d(x) \cdot \nabla\mu_0(x))\Phi, \\ F\overline{\mu} &:= (\alpha - 1)(\overline{\mu} - \mu_0)\Delta\overline{\mu} - (\overline{\mu} - \mu_0)(\nabla \log d(x) \cdot \nabla\overline{\mu}) + |\nabla\overline{\mu}|^2 \\ &\quad - 2(\nabla\mu_0(x) \cdot \nabla\overline{\mu}) + \overline{\mu}(\nabla \log d(x) \cdot \nabla\mu_0(x)) - (\alpha - 1)\overline{\mu}\Delta\mu_0(x). \end{aligned}$$

である．線形化された方程式の問題については [5, 6] にて議論されている．与えられた $\overline{\mu}$ に対して (14) の解 Φ を対応させる解作用素 S とすると，(13) の可解性は S の不動点を求める問題に帰着される．

$$X_{M,T} := \{\zeta \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\Omega \times [0, T)) \big| \nabla\zeta \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0, \|\zeta - \mu_0\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\Omega\times[0,T))} \leq M\} \tag{15}$$

以上の空間で T，M を適切に選ぶことで，作用素 $\mathcal{S}$ が縮小写像になることを示す．

$$\begin{cases} \Phi_t = L\Phi + F\overline{\mu}_1, & x \in \Omega, t > 0, \\ \Phi(x, 0) = \mu(x, 0), & x \in \Omega, \\ \nabla\Phi \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \tag{16}$$

(16) の外力項をそれぞれ $F\overline{\mu}_1$，$F\overline{\mu}_2$ としたときの解 Φ，$\tilde{\Phi}$ に対して $\Psi = \Phi - \tilde{\Phi}$ とした際の方程式を考える．[5] の結果から，以下が成り立つ．

補題 4.1. *[5, P320, Theorem5.2]* シャウダー評価

$$\begin{cases} \Psi_t = L\Psi + F\overline{\mu}_1 - F\overline{\mu}_2, & x \in \Omega, t > 0 \\ \Psi(x, 0) = 0, & x \in \Omega \\ \nabla\Psi \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases} \tag{17}$$

以上の方程式の解 Ψ が存在し，ある定数 C_S が存在して

$$\|\Psi\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} \leq C_s\|F\overline{\mu}_1 - F\overline{\mu}_2\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}$$

が成り立つ．

注意 4.2. Ψ の解が $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0, T))$ の関数空間で存在したとき，$F\overline{\mu}_1-F\overline{\mu}_2$ は $C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0, T))$ のクラスの関数になる．補題 *4.1* の不等式は，外力項 $F\overline{\mu}_1 - F\overline{\mu}_2$ の適切な最大正則性の不等式という．

補題 4.1 を用いて解作用素 $S\colon X_{M,T} \to X_{M,T}$ に対しての縮小性を示す．

$$\|S\overline{\mu}_1 - S\overline{\mu}_2\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} = \|\Psi_1 - \Psi_2\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} \leq \|F\overline{\mu}_1 - F\overline{\mu}_2\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}$$

解作用素が縮小写像になるためには, ある定数 $C < 1$ が存在して，

$$\|F\overline{\mu}_1 - F\overline{\mu}_2\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} \leq C\|\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}$$

が成り立てばよい．F の定義から，

$$
\begin{aligned}
\|F\overline{\mu}_1 - F\overline{\mu}_2\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} &= \|(\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\mu_0)\Delta\overline{\mu}_1 - (\alpha-1)(\overline{\mu}_2-\mu_0)\Delta\overline{\mu}_2 - (\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)\Delta\mu_0 \\
&\quad - (\overline{\mu}_1-\mu_0)(\nabla\log d\cdot\nabla\overline{\mu}_1) + (\overline{\mu}_2-\mu_0)(\nabla\log d\cdot\nabla\overline{\mu}_2) \\
&\quad + (\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)(\nabla\log d\cdot\nabla\mu_0) + |\nabla\overline{\mu}_1|^2 \\
&\quad - |\nabla\overline{\mu}_2|^2 - 2(\nabla\mu_0\cdot\nabla(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2))\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} \\
&\leq \|(\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\mu_0)\Delta\overline{\mu}_1 - (\alpha-1)(\overline{\mu}_2-\mu_0)\Delta\overline{\mu}_2 \\
&\quad - (\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)\Delta\mu_0\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} \\
&\quad + \| - (\overline{\mu}_1-\mu_0)(\nabla\log d\cdot\nabla\overline{\mu}_1) + (\overline{\mu}_2-\mu_0)(\nabla\log d\cdot\nabla\overline{\mu}_2) \\
&\quad + (\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)(\nabla\log d\cdot\nabla\mu_0)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} \\
&\quad + \||\nabla\overline{\mu}_1|^2 - |\nabla\overline{\mu}_2|^2 - 2(\nabla\mu_0\cdot\nabla(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2))\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} \\
&=: N_1 + N_2 + N_3
\end{aligned}
$$

となる．N_1, N_2, N_3 をそれぞれ $\|\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}$ で評価することを考える．初めに N_1 について考察する．

$$
(\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\mu_0)\Delta(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2) = (\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\mu_0)\Delta\overline{\mu}_1 - (\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\mu_0)\Delta\overline{\mu}_2
$$

なので，

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \|(\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\mu_0)\Delta(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2) + (\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)\Delta(\overline{\mu}_2-\mu_0)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}, \\
&\leq \|(\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\mu_0)\Delta(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} + \|(\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)\Delta(\overline{\mu}_2-\mu_0)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}.
\end{aligned}
$$

補題 2.3 から，

$$
\begin{aligned}
\|(\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\mu_0)\Delta(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} &\leq (\alpha-1)\|\overline{\mu}_1-\mu_0\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} \\
&\quad \times \|\Delta(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}, \\
\|(\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)\Delta(\overline{\mu}_2-\mu_0)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} &\leq (\alpha-1)\|\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} \\
&\quad \times \|\Delta(\overline{\mu}_1-\mu_0)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}.
\end{aligned}
$$

補題 2.2 と $\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2 \in X_{M,T}$ より，

$$
\begin{aligned}
\|\overline{\mu}_1-\mu_0\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} &\leq 3(T+T^{1-\beta/2})\|\overline{\mu}_1-\mu_0\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} \leq 3(T+T^{1-\beta/2})M, \\
\|\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} &\leq 3(T+T^{1-\beta/2})\|\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}, \\
\|\Delta(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} &\leq \|\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}, \\
\|\Delta(\overline{\mu}_1-\mu_0)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} &\leq \|\overline{\mu}_1-\mu_0\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} \leq M
\end{aligned}
\tag{18}
$$

が成り立つ．したがって，

$$
\begin{aligned}
N_1 &\leq \|(\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\mu_0)\Delta(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} + \|(\alpha-1)(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)\Delta(\overline{\mu}_2-\mu_0)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}, \\
&\leq 6M(\alpha-1)(T+T^{1-\beta/2})\|\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

が成り立つ．次に N_2 の評価を求める．

$$
\begin{aligned}
&-(\overline{\mu}_1-\mu_0)(\nabla\log d\cdot\nabla\overline{\mu}_1) + (\overline{\mu}_2-\mu_0)(\nabla\log d\cdot\nabla\overline{\mu}_2) + (\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)(\nabla\log d\cdot\nabla\mu_0) \\
&= -(\overline{\mu}_1-\mu_0)\nabla\log d\cdot\nabla(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2) - (\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)\nabla\log d\cdot\nabla(\overline{\mu}_2-\mu_0)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって，

$$N_2 \leq \|(\overline{\mu}_1 - \mu_0)\nabla \log d \cdot \nabla(\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} + \|(\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2)\nabla \log d \nabla(\overline{\mu}_2 - \mu_0)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}.$$

補題 2.3，補題 2.2，補題 2.1 より，

$$\begin{aligned}
&\|(\overline{\mu}_1 - \mu_0)\nabla \log d \cdot \nabla(\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}\\
&\leq 9(T^{(1+\beta)/2} + T^{1/2})(T + T^{1-\beta/2})M\|\nabla \log d\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}\|\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))},\\
&\|(\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2)\nabla \log d \nabla(\overline{\mu}_2 - \mu_0)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}\\
&\leq 9(T^{(1+\beta)/2} + T^{1/2})(T + T^{1-\beta/2})M\|\nabla \log d\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}\|\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}.
\end{aligned}$$

したがって，N_2 は以下のように評価される．

$$N_2 \leq 18(T^{(1+\beta)/2} + T^{1/2})(T + T^{1-\beta/2})M\|\nabla \log d\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}\|\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}.$$

次に，N_3 の評価を考察する．

$$\begin{aligned}
&|\nabla\overline{\mu}_1|^2 - |\nabla\overline{\mu}_2|^2 - 2(\nabla\mu_0 \cdot \nabla(\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2))\\
&= (\nabla(\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2) \cdot \nabla(\overline{\mu}_1 - \mu_0)) + (\nabla(\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2) \cdot \nabla(\overline{\mu}_2 - \mu_0))
\end{aligned}$$

が成り立つことから，

$$N_3 = \|\nabla(\overline{\mu}_1 - \mu_0) \cdot \nabla(\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2) + \nabla(\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2) \cdot \nabla(\overline{\mu}_2 - \mu_0)\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}$$

が得られる．補題 2.3，補題 2.2，補題 2.1 より，

$$N_3 \leq 18(T^{(1+\beta)/2} + T^{1/2})^2 M\|\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}$$

が成り立つ．したがって，以上の結果をまとめると，

$$\begin{aligned}
&\|F\overline{\mu}_1 - F\overline{\mu}_2\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}\\
&\leq (6(\alpha - 1)(T + T^{1-\beta/2}) + 18(T^{(1+\beta)/2} + T^{1/2})(T + T^{1-\beta/2})\\
&\quad + 18(T^{(1+\beta)/2} + T^{1/2})^2)M\|\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}.
\end{aligned}$$

したがって，まとめると

$$\begin{aligned}
\|S\overline{\mu}_1 - S\overline{\mu}_2\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))} &\leq C_{\mathrm{S}}\|F\overline{\mu}_1 - F\overline{\mu}_2\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}\\
&\leq (6(\alpha - 1)(T + T^{1-\beta/2}) + 18(T^{(1+\beta)/2} + T^{1/2})(T + T^{1-\beta/2})\\
&\quad + 18(T^{(1+\beta)/2} + T^{1/2})^2)\\
&\quad \times MC_{\mathrm{S}}\|\overline{\mu}_1 - \overline{\mu}_2\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Omega}\times[0,T))}
\end{aligned}$$

が得られる．したがって，

$$(6(\alpha - 1)(T + T^{1-\beta/2}) + 18(T^{(1+\beta)/2} + T^{1/2})(T + T^{1-\beta/2}) + 18(T^{(1+\beta)/2} + T^{1/2})^2)MC_{\mathrm{S}} < 1$$

となるように T を十分小さくとると，解作用素 S は縮小写像になる．バナッハの不動点定理から，$S\overline{\mu} = \overline{\mu}$ となる S の不動点 $\overline{\mu}$ が存在する．よって，(NFP) は時間局所解が存在することが示せた．

参考文献

[1] 荒木康太, 非線形拡散を持つ Fokker-Planck 方程式における散逸関数の長時間挙動, 第 21 回数学総合若手研究集会, 北海道大学数学講究録 **189** (2025), 615–624.

[2] Araki, K. and Mizuno, M., *Long-time behavior of free energy in the nonlinear Fokker-Planck equation*, arXiv2512.11455.

[3] Bayir, B., Epshteyn, Y., Feldman, W. M., *Global well-posedness of a nonlinear Fokker-Planck type model of grain growth*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **48**(2026),404–422.

[4] Epshteyn, Y., Liu, C., Liu, C., and Mizuno, M., *Local well-posedness of a nonlinear Fokker-Planck model*, Nonlinearity,**36**(2023), 1890–1917.

[5] Ladyženskaja, O. A. and Solonnikov, V. A. and Ural'ceva, N. N., *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.

[6] Lieberman, G. M., *Second order parabolic differential equations*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996.